***Лабораторная работа №2***

***Тема: «Теория поверхностей в Е­3»***

Для поверхности S, заданной в E3 ­­векторно-параметрическим уравнением

(1)

или параметрическими уравнениями

(1′)

уравнения касательной плоскости и нормали в фиксированной точке M­0­∈S, имеют вид

где , , - радиус-вектор текущей точки.

Уравнения (2) и (3) в скалярной форме имеют следующий вид:

Главные кривизны K­1­ и K­2­ поверхности S, заданной уравнением (1), являющиеся по определению экстремальными значениями нормальной кривизны K­n­, находятся как корни квадратного уравнения.

Здесь  ­ij­ и b­ij ­ - коэффициенты 1-ой и 2-ой квадратичных форм соответственно. Эти коэффициенты подсчитываются по формулам:

– частная производная 2-го порядка для функции (1).

Полная кривизна K и средняя кривизна H поверхности S вычисляются по формулам:

По знаку полной кривизны в данной точке определяется тип этой точки: если K>0, то точка является точкой эллиптического типа, при K<0 – точкой гиперболического типа, при K=0 – точкой параболического типа.

Необходимым и достаточным условием существования точек округления на поверхности S является пропорциональность коэффициентов 1-ой и 2-ой квадратичных форм в данных точках:

Рассмотрим поверхность:

­ Составим уравнения касательной плоскости и нормали в точке M­0­, и исследуем данную поверхность.

Точка M­0­ имеет следующие декартовы координаты: , ,

Т.о. направляющий вектор нормали к поверхности в точке M0 ­имеет следующие координаты []=.

Уравнение нормали рассматриваемой поверхности S в заданной точке M­0­ имеет вид:

Уравнение касательной плоскости к поверхности S в заданной точке получаем, используя (2):

Для исследования поверхности S подсчитаем коэффициенты 1-ой и 2-ой квадратичных форм:

Для вычисления коэффициентов второй квадратичной формы нам понадобятся частные производные 2-го порядка от радиус-ветора заданной поверхности S и единичный вектор нормали и поверхности в текущей точке (см. формулы (7) и (8)):

или

Поэтому

Cледовательно,

Подставляя подсчитанные и в (5), получаем уравнение для нахождения главных кривизн:

Следовательно, полная кривизна K рассматриваемой поверхности

Т.к. K<0 во всех точках поверхности S, то она состоит только из точек гиперболического типа, средняя кривизна Н=0, точки округления отсутствуют.

***Задание:*** для заданной поверхности составить уравнения касательной плоскости и нормали в указанной точке, найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, выяснить тип точек на данной поверхности, наличие точек округления.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *1 вариант* | *2 вариант* | *3 вариант* | *4 вариант* |
| ­M­0 | M­0­ | M­0­ | M­0­ |
| *5 вариант* | *6 вариант* | *7 вариант* | *8 вариант* |
| M­0­ | ­M­0­ | M­0­ | M­0­ |
| *9 вариант* | *10 вариант* | *11 вариант* | *12 вариант* |
| ­ a=const  M­0­ | ­u≠0, k=const  M­0­ | a=const  M­0­ | a=const  M­0­ |
| *13 вариант* | *14 вариант* | *15 вариант* |
| ­M­0­ | ­M­0­ | a=const  M­0­ |