Лабораторная работа 2

«Аналитическая геометрия в пространстве»

Номер варианта совпадает с порядковым номером в списке.

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через:

1.1. точку M(2,-1,4), параллельно векторам $\bar{a} = (-1,1,2)$, $\bar{b} = (3,1,0)$

1.2. точку M(-2,3,1), параллельно векторам $\bar{a} = (4,-1,3)$, $\bar{b} = (2,1,-1)$

1.3. точку M(1,0,-2), параллельно векторам $\bar{a} = (1,1,-2)$, $\bar{b} = (-2,0,1)$

1.4. точки M_1(3,-1,2) и M_2(4,-2,-1), параллельно вектору $\bar{a} = (2,-1,3)$

1.5. точки M_1(1,-1,-2) и M_2(3,1,1), параллельно вектору $\bar{a} = (1,-2,3)$

1.6. точки M_1(3,-1,2), M_2(4,-1,-1) и M_3(2,0,2)

1.7. точки M_1(-3,2,-1), M_2(-1,2,4) и M_3(3,3,-1)

2.Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями

2.1. x-2y-2z-12=0 и x-2y-2z-6=0

2.2. 2x-3y+6z-14=0 и 4x-6y+12z+21=0

2.3. 2x-y+2z+9=0 и 4x-2y+4z-21=0

2.4. 16x+12y-15z+50=0 и 4x-6y+12z+21=0

2.5. 30x-32y+24z-75=0 и 15x-16y+12z-25=0

2.6. 6x-18y-9z-28=0 и 4x-12y-6z-7=0

2.7. 3x-2y+2z=0 и 6x-2y+4z-1=0

3. Выяснить взаимное расположение трех плоскостей

3.1. 3x-3y+2z=0; x+2y+5=0; 2x-3y+4z+5=0

3.2. 3x-3y+z-2=0; x+7y+5=0; 2x-3y+4z+5=0

3.3. 3x-y+z=0; x+2y+5=0; 2x-3y+2z+5=0

3.4. 3x-3y+2z=0; x+7y+5=0; 2x-3y+4z+5=0

3.5. 3x-y+z=0; x+7y+5=0; 2x-3y+4z+5=0

3.6. 3x-3y+z-2=0; x+7y+5=0; 2x-3y+2z+5=0

3.7. 3x-3y+2z=0; x+2y+5=0; 3x-3y+z-2=0

4. Составить уравнения стороны AB, медианы, высоты и биссектрисы, опущенных из вершины C треугольника ABC, найти угол при вершине C, если вершины имеют следующие координаты:

4.1. A(1,-1,0); B(3,3,0); C(2,0,-2)

4.2. A(0,7,3); B(-1,-2,3); C(2,-3,0)

4.3. A(2,2,3); B(-2,1,0); C(1,1,2)

4.4. A(1,3,-2); B(-2,0,1); C(1,1,-1)

4.5. A(4,-1,2); B(2,1,3); C(0,-2,1)

4.6. A(1,1,1); B(0,3,-1); C(2,0,-5)

4.7. A(2,0,-1); B(1,-1,3); C(4,2,-1)

5. Выяснить взаимное расположение двух прямых:

5.1. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{1}$ и $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+1}{-1}$

5.2. $\frac{x-2}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z}{-1}$ и $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$

5.3. $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-5}{2}$

5.4. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+2}{-1}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{1}$

5.5. $\frac{x-4}{4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}$ и $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+4}{0}$

5.6. $\frac{x+2}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{-3}$ и $\frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{2}$

5.7. $\frac{x-2}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z}{-1}$ и $\frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{2}$

6.1. Записать уравнение прямой L, проходящей через точку М перпендикулярно двум заданным прямым L_1 и L_2:

$$M(0;1;0) \quad L_1: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1} \quad L_2: \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-3}{0}$$

6.2. Составить уравнение прямой L, проходящей через точку М параллельно двум заданным плоскостям π_1 и π_2:

$$M(2;-1;1) \quad \pi_1: x-2y+z+3=0 \quad \pi_2: x+y-2z+1=0$$

6.3. Составить уравнение плоскости π, проходящей через точку М перпендикулярно двум заданным плоскостям π_1 и π_2:

$$M(0;0;1) \quad \pi_1: x-y+z-2=0 \quad \pi_2: 2x-3y-5=0$$

6.4. Записать уравнение прямой L, проходящей через точку М перпендикулярно двум заданным прямым L_1 и L_2:

$$M(1;1;1) \quad L_1: \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{3} \quad L_2: \begin{cases} x+y-z+6=0 \\ 2y-3z+5=0 \end{cases}$$

6.5. Составить уравнение прямой L, проходящей через точку М параллельно двум заданным плоскостям π_1 и π_2:

$$M(0;0;-1) \quad \pi_1: 3x+2z-6=0 \quad \pi_2: 5x+4y-3z-2=0$$

6.6. Составить уравнение плоскости π, проходящей через точку М перпендикулярно двум заданным плоскостям π_1 и π_2:

$$M(2;3;1) \quad \pi_1: 3x-2z+4=0 \quad \pi_2: 5x+2y-2z=0$$

6.7. Записать уравнение прямой L, проходящей через точку М перпендикулярно двум заданным прямым L_1 и L_2:

$$M(-1;-2;0) \quad L_1: \begin{cases} 3x-y-2z+3=0 \\ 2x-3y+z+10=0 \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x+y+x+1=0 \\ x-y-2z-5=0 \end{cases}$$

Примеры решения задач:

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(1;0;4), $B(-1;2;4)$ и $C(2;-2;3)$.

Решение. Обозначим $M(x;y;z)$ текущую точку искомой плоскости, тогда по необходимости векторы $\overline{AM}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ - компланарны и, следовательно, их смешанное произведение равно нулю: $(\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}) = 0$.

Как известно, смешанное произведение в координатах вычисляется как определитель 3-го порядка, строками которого являются координаты перемножаемых векторов, так что остается лишь найти эти координаты:

$\overline{AM} = (x-1; y-0; z-4)$, $\overline{AB} = (-2;2;0)$, $\overline{AC} = (1;-2;-1)$.

Теперь

$$\left(\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}\right) = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2x-2y+2z-6,$$

следовательно уравнение искомой плоскости имеет вид

$-2x-2y+2z-6=0$ или $x+y-z+3=0$.

2. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $\pi_1: 2x-3y+4z-1=0$ и $\pi_2: 2x-3y+4z+5=0$.

Решение. Расстояние между параллельными плоскостями совпадает с расстоянием любой точки на одной из плоскостей до другой плоскости.

Сначала найдем какую-либо точку на π_1, то есть какое-либо частное решение уравнения $2x-3y+4z-1=0$. Таковым будет, например, $x=0$; $y=z=1$. Переформулируем задачу: найти расстояние от точки $M_1(0;1;1)$ до плоскости $\pi_2: 2x-3y+4z+5=0$.

Здесь нам пригодится нормированное уравнение плоскости , переход к которому от общего уравнения $Ax+By+Cz+D=0$ осуществляется умножением на так называемый нормирующий множитель

$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, знак которого выбирается противоположным знаку свободного члена D. Для плоскости π_2 получим:

$$\pi_2 : 2x - 3y + 4z + 5 = 0 \left| \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}} \right) \right. \Rightarrow$$

$$-\frac{2}{\sqrt{29}} x + \frac{3}{\sqrt{29}} y - \frac{4}{\sqrt{29}} z - \frac{5}{\sqrt{29}} = 0$$

нормированное уравнение .

Теперь расстояние от точки M_1 до плоскости π_2 найдем, подставив координаты этой точки в модуль левой части нормированного уравнения плоскости:

$$d(M_1, \pi_2) = \left| -\frac{2}{\sqrt{29}} \cdot 0 + \frac{3}{\sqrt{29}} \cdot 1 - \frac{4}{\sqrt{29}} \cdot 1 - \frac{5}{\sqrt{29}} \right| = \frac{6}{\sqrt{29}}.$$

3. Пусть даны три плоскости: α, β и γ$\overline{N_1}$, , $\overline{N_2}$, $\overline{N_3}$ – их нормальные векторы, соответственно. Рассмотрим все возможные случаи.

1) Все три плоскости совпадают: α=β=γ. Очевидно, что в этом случае $\overline{N_1} \parallel \overline{N_2} \parallel \overline{N_3}$.

2) Две плоскости совпадают, а третья параллельна им, например: α∥β=γ и в этом случае $\overline{N_1} \parallel \overline{N_2} \parallel \overline{N_3}$.

3) Две плоскости совпадают, а третья пересекает их, например: α=β∩γ=L – прямая пересечения. В этом случае, $\overline{N_1} \parallel \overline{N_2} \nparallel \overline{N_3}$

4) Все три плоскости параллельны друг другу: α∥β∥γ. Тогда $\overline{N_1} \parallel \overline{N_2} \parallel \overline{N_3}$.

5) Две плоскости параллельны, а третья пересекает их, например: α∥β∦γ . В этом случае α∩γ=L_1 – прямая пересечения плоскостей α и γ, β∩γ=L_2 – прямая пересечения плоскостей β и γ и, как известно из курса геометрии, $L_1 \parallel L_2$. Нормальные векторы $\overline{N_1} \parallel \overline{N_2} \nparallel \overline{N_3}$.

6) Все три плоскости пересекаются по одной прямой и тогда $\overline{N_1} \nparallel \overline{N_2}$, $\overline{N_1} \nparallel \overline{N_3}$, $\overline{N_2} \nparallel \overline{N_3}$, но все три вектора лежат в одной плоскости.

7) Каждая пара плоскостей пересекается по своей прямой, $\overline{N_1} \nparallel \overline{N_2}$, $\overline{N_1} \nparallel \overline{N_3}$, $\overline{N_2} \nparallel \overline{N_3}$, но все три вектора лежат в одной плоскости.

8) Все три плоскости пересекаются в одной точке и их нормальные векторы некомпланарны.

5. Выяснить взаимное расположение двух прямых $L_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \end{cases}$ и $L_2: \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$.

Решение. Для двух прямых в пространстве возможны следующие варианты взаимного расположения: прямые параллельны (в частности, совпадают); прямые пересекаются; прямые скрещиваются.

Параллельность прямых легко определить по их направляющим векторам. В нашем случае $\overline{q_1} = (1;-1;-1)$ и $\overline{q_2} = (3;-1;2)$. Координаты векторов не пропорциональны, следовательно, векторы не параллельны и прямые тоже не параллельны.

Из уравнений прямых L_1 и L_2 видим, что точка $M_1(3;-1;0)$ лежит на L_1, а $M_2(5;-1;3)$ - на L_2. Очевидно, случаю пересечения L_1 и L_2 соответствует компланарность векторов $\overline{M_1M_2}, \overline{q_1}, \overline{q_2}$, а случаю скрещивания – некомпанарность. В нашем случае

$$\overline{M_1M_2} = (2;0;3) \text{ и } \left(\overline{M_1M_2}, \overline{q_1}, \overline{q_2}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

Следовательно, указанные векторы компланарны, а прямые L_1 и L_2 - пересекаются. При этом точка пересечения их имеет координаты, являющиеся решением системы уравнений

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \\ \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \\ \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+1}{-1} \\ \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \\ x + 3y - 2 = 0 \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow.$$

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \\ 3 + t + 3(-1 - t) - 2 = 0 \\ 2(-1 - t) - t - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Итак, прямые L_1 и L_2 пересекаются в точке $M_0(2;0;1)$.

6. Найти прямую L, проходящую через точку $M_0(0;1;2)$ параллельно двум заданным плоскостям $\pi_1: 3x-3y+z=0$ и $\pi_2: x+2y+5=0$.

Решение. Поскольку искомая прямая L с неизвестным направляющим вектором $\bar{q}$ параллельна плоскостям π_1 и π_2 с векторами нормали $\overline{N_1}(3;-3;1)$, $\overline{N_2}(1;2;0)$,то $\bar{q} \perp \overline{N_1}$ и $\bar{q} \perp \overline{N_2}$, а потому

$$\bar{q} = \overline{N_1} \times \overline{N_2} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-2;1;9).$$

Следовательно, получаем уравнение искомой прямой $L: \frac{x-0}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{9}$.