Лабораторная работа 1

Тема: «Векторная алгебра»

Номер варианта совпадает с порядковым номером в списке.

Задание 1. Решить систему методом Крамера

1.1 $\begin{cases} 3x-4y-2z=10 \\ 15x+21y-z=32 \\ 5x+3y+3z=22 \end{cases}$ 1.2 $\begin{cases} x_1-5x_2+6x_3=54 \\ 7x_1+5x_2+3x_3=13 \\ 4x_1-3x_2-2x_3=10 \end{cases}$ 1.3 $\begin{cases} -x_1+x_2-x_3=75 \\ 2x_1-3x_2+4x_3=14 \\ 5x_1+6x_2+7x_3=11 \end{cases}$

1.4 $\begin{cases} 10x_1-2x_2+x_3=3 \\ 11x_1-x_2+x_3=55 \\ 12x_1-x_2+3x_3=65 \end{cases}$ 1.5 $\begin{cases} 5x_1-5x_2+5x_3=1 \\ 3x_1+3x_2-3x_3=2 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=7 \end{cases}$ 1.6 $\begin{cases} 6x_1+4x_2+2x_3=1 \\ x_1-2x_2+3x_3=4 \\ 5x_1-x_2+x_3=10 \end{cases}$

1.7 $\begin{cases} 9x_1+6x_2+2x_3=4 \\ 2x_1-2x_2+3x_3=7 \\ 4x_1-x_2+2x_3=-5 \end{cases}$

Задание 2. Найти разложение векторов по заданным векторам.

2.1. В параллелограмме ABCD $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AD}=\bar{b}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}$ и $\overline{MD}$, где M есть точка пересечения диагоналей параллелограмма.

2.2. Три вектора $\overline{AB}=\bar{c}$, $\overline{BC}=\bar{a}$, $\overline{CA}=\bar{b}$ служат сторонами треугольника. С помощью$\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ выразить векторы, совпадающие с медианами треугольника: $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ и $\overline{CP}$.

2.3. В трапеции ABCD отношение основания $\overline{AD}$ к основанию $\overline{BC}$ равно λ. Полагая $\overline{AC}=\bar{a}$, $\overline{BD}=\bar{b}$, выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ и $\overline{DA}$.

2.4. Сторона $\overline{BC}$ треугольника ABC разделена на пять равных частей и все точки деления D_1, D_2, D_3, D_4 соединены с противолежащей вершиной A. Обозначив стороны $\overline{AB}=\bar{c}$ и $\overline{BC}=\bar{a}$, найти выражения для векторов $\overline{D_1A}, \overline{D_2A}, \overline{D_3A}, \overline{D_4A}$.

2.5. Три вектора $\overline{AB}=\bar{c}$, $\overline{BC}=\bar{a}$, $\overline{CA}=\bar{b}$ служат сторонами треугольника. С помощью $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выразить векторы, совпадающие с медианами треугольника: $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ и $\overline{CP}$.

2.6. В правильном шестиугольнике ABCDEF даны: $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{m}$, $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{n}}$. Разложить по этим двум векторам $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{AF}}$ и $\overline{\mathrm{EF}}$.

2.7. В ромбе ABCD даны диагонали $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{a}$ и $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{b}}$. Разложить по этим двум векторам все векторы, совпадающие со сторонами ромба: $\overline{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{BC}}, \overline{\mathrm{CD}}$ и $\overline{\mathrm{DA}}$.

Задание 3. Выяснить, является ли линейно зависимой система векторов и, если является, найти эту зависимость

3.1. $\bar{a} = (1, 2, -1)$, $\overline{b} = (0, -1, 1)$, $\bar{c} = (1, -1, -1)$

3.2. $\bar{a} = (6, 4, 2)$, $\overline{b} = (-9, 6, 3)$, $\bar{c} = (-3, 6, 3)$

3.3. $\bar{a} = (0, -1, 1)$, $\overline{b} = (1, 1, 0)$, $\bar{c} = (1, 2, -1)$

3.4. $\bar{a} = (5, 2, 1)$, $\overline{b} = (-1, 4, 2)$, $\bar{c} = (-1, -1, 6)$

3.5. $\bar{a} = (6, -18, 12)$, $\overline{b} = (8, 7, 3)$, $\bar{c} = (-8, 24, -16)$

3.6. $\bar{a} = (2, -1, -1)$, $\overline{b} = (-1, 2, -1)$, $\bar{c} = (-1, -1, 2)$

3.7. $\bar{a} = (0, 0, 1)$, $\overline{b} = (1, -1, -1)$, $\bar{c} = (1, -1, 1)$

Задание 4. Найти длины сторон и углы треугольника ABC, если его вершины имеют следующие координаты

4.1. A(1,-1,0), B(3,3,0), C(2,0,-2)

4.2. A(0,7,3), B(-1,-2,3), C(2,-3,0)

4.3. A(2,2,3), B(-2,1,0), C(1,1,2)

4.4. A(2,-1,4), B(3,2,-6), C(-5,0,2)

4.5. A(1,2,-1), B(2,-1,3), C(-4,7,5)

4.6. A(1,-1,-3), B(2,1,-2), C(-5,2,-6)

4.7. A(2,1,2), B(1,0,-1), C(3,-1,4)

Задание 5. Найти площадь и длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах

5.1. $\bar{a} = (1, 2, -1)$, $\overline{b} = (0, -1, 1)$

5.2. $\bar{a} = (6, 4, 2)$, $\overline{b} = (-9, 6, 3)$

5.3. $\bar{a} = (0, -1,1)$, $\bar{b} = (1,1,0)$

5.4. $\bar{a} = (5, 2,1)$, $\bar{b} = (-1,4,2)$

5.5. $\bar{a} = (6, -18,12)$, $\bar{b} = (8,7,3)$

5.6. $\bar{a} = (2, -1, -1)$, $\bar{b} = (-1,2, -1)$

5.7. $\bar{a} = (0, 0,1)$, $\bar{b} = (1, -1, -1)$

Задание 6. Найти объем тетраэдра ABCD и высоту DH. Определить, является тройка $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ правой или левой.

6.1. A(1,2,0), B(3,-1,2), C(0,7,-3), D(1,-1,2)

6.2. A(3,-2,1), B(0,-1,2), C(3,1,-4), D(2,3,2)

6.3. A(1,2,3), B(3,2,1), C(0,-2,-3), D(-4,1,3)

6.4. A(4,1,2), B(4,-1,1), C(2,5,3), D(3,-1,1)

6.5. A(2,-1,0), B(3,0,-1), C(2,3,-1), D(-1,-1,-2)

6.1. A(2,-1,1), B(5,5,4), C(3,2,-1), D(4,1,3)

6.1. A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7), D(-5,-4,8)

Примеры решения заданий:

Пример 1.Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 7 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$ по правилу Крамера

Решение. Правило Крамера применимо лишь к системе, матрица из коэффициентов которой квадратная и невырожденная. В нашем случае матрица из коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \times (-1) \times 4 + (-2) \times 3 \times 3 + 6 \times 5 \times 1 - 6 \times (-1) \times 3 - (-2) \times 5 \times 4 - 1 \times 3 \times 1 = 63$$

Получили $\Delta \neq 0$, следовательно, применимо правило Крамера $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i получены из Δ заменой i – го столбца столбцом свободных членов системы.

Итак, имеем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 10 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 91, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 5 & 10 & 3 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 5 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 58.$$

Отсюда $x_1 = \dfrac{91}{63} = \dfrac{13}{9}$; $x_2 = \dfrac{-1}{63}$; $x_3 = \dfrac{58}{63}$.

Пример 2. Найти разложение векторов по заданным векторам.

Дан четырехугольник ABCD (Рисунок 16).

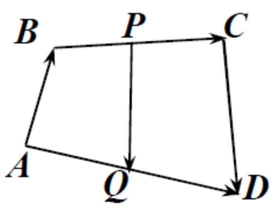

Рисунок 16

Точки ***P*** и ***Q*** – середины сторон ***BC*** и ***AD***. Выразить вектор $\overrightarrow{PQ}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, т.е. представить в виде линейной комбинации этих векторов.

Решение.

Имеем $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ} =$

$= -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Если учесть, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = 0$, и значит, $\overrightarrow{DA} = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$, то получим

$$\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$

Пример 3. Выяснить, есть ли линейная зависимость между векторами

$\bar{a} = (0;1;-1)$, $\bar{b} = (3;2;0)$ $\bar{c} = (2;0;3)$.

Решение. Если данные векторы линейно зависимы, то существуют вещественные числа $\alpha, \beta, \gamma,$ не равные нулю одновременно и такие, что $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = 0$. Вектор равен нулю, если все его координаты равны нулю, поэтому последнее векторное равенство в координатах эквивалентно системе уравнений относительно α, β, γ:

$$\begin{cases} \alpha \times 0 + \beta \times 3 + \gamma \times 2 = 0 \\ \alpha \times 1 + \beta \times 2 + \gamma \times 0 = 0 \\ \alpha \times (-1) + \beta \times 0 + \gamma \times 3 = 0 \end{cases}$$

Это линейная однородная система уравнений, которая всегда имеет по крайней мере одно решение – тривиальное: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Нас же интересуют решения, в которых не все неизвестные равны нулю, поэтому займемся решением полученной системы:

Данная система имеет бесконечно много решений. Общее решение записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \beta = -2\gamma / 3 \\ \alpha = 3\gamma \\ \gamma \in R \end{cases}$$

Полагая $\gamma = 3$, получаем частное решение $\begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = 9 \\ \gamma = 3 \end{cases}$.

Векторы $a, \overline{b}, c$ линейно зависимы и:

$$9a - 2\overline{b} + 3c = 0$$

Пример 4.Найти длины сторон и углы треугольника с вершинами $A(0;-2;-3),\quad B(1;-1;5),\quad C(0;0;6).$

Решение. Длина отрезка с концами A,B равна

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-(-2))^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{66}.$$

Аналогичным образом найдем остальные стороны треугольника:

$$|BC| = \sqrt{(0-1)^2 + (0-(-1))^2 + (6-5)^2} = \sqrt{3};$$
$$|CA| = \sqrt{(0-0)^2 + (-2-0)^2 + (-3-6)^2} = \sqrt{85}.$$

Внутренний угол при вершине A треугольника образован векторами $\overline{AB}, \overline{AC},$ поэтому

$$\cos \angle A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}.$$

Найдем координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$:

$$\overline{AB}=\big((1-0),\quad (-1-(-2)),\quad (5-(-3))\big)=(1;1;8);$$
$$\overline{AC}=\big((0-0),\quad (0-(-2)),\quad (6-(-3))\big)=(0;2;9;);$$
$$\overline{BC}=\big((0-1),\quad (0-(-1)),\quad (6-5)\big)=(-1;1;1).$$

Заметим , что

$$\overline{BA}=-\overline{AB}=(-1;-1;-8),\quad \overline{CA}=-\overline{AC}=(0;-2;-9),\quad \overline{CB}=-\overline{BC}=(1;-1;-1).$$

Теперь легко вычисляем

$$\cos\angle A=\frac{1\cdot 0+1\cdot 2+8\cdot 9}{\sqrt{66}\cdot\sqrt{85}}=\frac{74}{\sqrt{5610}},$$
$$\cos\angle B=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}{\left|\overline{BC}\right|\cdot\left|\overline{BA}\right|}=\frac{-1\cdot(-1)+1\cdot(-1)+1\cdot(-8)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{66}}=\frac{-8}{3\sqrt{22}},$$
$$\cos\angle C=\frac{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}{\left|\overline{CA}\right|\cdot\left|\overline{CB}\right|}=\frac{0\cdot 1+(-2)\cdot(-1)+(-9)\cdot(-1)}{\sqrt{85}\cdot\sqrt{3}}=\frac{11}{\sqrt{255}}.$$

Пример 5. Найти площадь и длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=(0,3,4)$, $\bar{b}=(4,3,0)$

Площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения векторов, на которых построен данный параллелограмм:

$$[a,b]=\left(\begin{vmatrix}3&4\\3&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&0\\0&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&3\\4&3\end{vmatrix}\right)=(-12,16,-12)$$

$$S\text{п}=|[a,b]|=\sqrt{(-12)^2+16^2+(-12)^2}=\sqrt{544}=4\sqrt{34}$$

Диагонали параллелограмма будут равны $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$. Найдем длины этих векторов:

$$d_1=\sqrt{\left(\bar{a}+\bar{b}\right)^2}=\sqrt{4^2+6^2+4^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$

$$d_2=\sqrt{\left(\bar{a}-\bar{b}\right)^2}=\sqrt{(-4)^2+0^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

Пример 6. Найти объем тетраэдра ABCD и высоту DH. Определить, является тройка $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ правой или левой.

Заданы вершины A(14;4;5), B(–5;–3;2), C(–2;–6;–3), D(–2;2;–1).

Решение. Координаты векторов находим по формуле:

$$\begin{cases} X = x_j - x_i \\ Y = y_j - y_i \\ Z = z_j - z_i \end{cases}$$

здесь X,Y,Z координаты вектора; x_i, y_i, z_i - координаты точки A_i; x_j, y_j, z_j - координаты точки A_j;

$\overline{AB}$(-19;-7;-3), $\overline{AC}$(-16;-10;-8), $\overline{AD}$(-16;-2;-6)

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -19 & -7 & -3 \\ -16 & -10 & -8 \\ -16 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \frac{676}{6} = 112.67$$

Поскольку смешанное произведение ($\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$)>0, то данная тройка является правой.